Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут»

Факультет прикладної математики

Кафедра системного програмування і спеціалізованих комп’ютерних систем

Розрахунково-графічна робота

з дисципліни

**«Теорія ймовірностей та математична статистика»**

**Виконав: Перевірила:**

Студент групи **КВ-41** доцент кафедри СП СКС

Горпинич-Радуженко Іван \_\_\_\_\_\_\_\_ / Сапсай Т.Г. /

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2015 р.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **01.11** | **02.11** | **03.11** | **04.11** | **05.11** | **06.11** | **07.11** | **08.11** | **09.11** | **Σ** |
| **Уточнення**  **умови** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **Бали** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

ІІІ семестр

Київ 2015

**01-05.**

У малому підприємстві працюють 5 жінки та 6 чоловіків. Випадковим способом дві особи запізнились. Знайти імовірність того, що одна з цих осіб — жінка, а друга — чоловік.

Розв’язання:

1. Одночасно запізнились 2 людини, при чому одна з цих осіб — жінка, а друга — чоловік. Загальна кількість співробітників на підприємстві . Так як імовірність запізнення однієї жінки це рівно можлива подія (тому що нема умов вибору певної особи із жінок) тому імовірність запізнення однієї жінки: . Так як чоловіка який запізнився, ми вибираємо з залишившихся робітників (тобто ), то імовірність запізнення одного чоловіка: . Але якщо розглядати спочатку запізнення чоловіка, а потім жінки, то імовірність запізнення чоловіка: ; а жінки: . Так як ці події залежні між собою і повинні відбуватися одночасно, то імовірність запізнення однієї жінки та одного чоловіка буде дорівнювати:

1. Нехай подія А – запізнились чоловік і жінка.

Для того, щоб визначити ймовірність події А, потрібно визначити кількість способів вибору одного чоловіка і однієї жінки та кількість способів вибору випадкових двох людей на підприємстві. Тому імовірність запізнення однієї жінки та одного чоловіка буде дорівнювати:

Відповідь: .

**02-05.**

Покупець випробовує шестизарядний револьвер. Знайти ймовірність того, що при натисненні покупцем на курок пролунає постріл, якщо рівно можливі всі припущення про кількість заряджених у револьвер патронів.

Розв’язання:

Так як за умовою задачі рівно можливі всі припущення про кількість заряджених у револьвер патронів, а припущень у нас ), то імовірність появи кожного припущення дорівнює: .

Напишемо усі можливі припущення про кількість заряджених у револьвер патронів:

;

;

;

;

;

;

;

Ймовірність того, що при натисненні покупцем на курок пролунає постріл, знайдемо за формулою повної імовірності:

Відповідь: .

**03-05.**

Імовірність того, що потрібна студентові сума грошей є в одного з його чотирьох друзів дорівнює 0,5; 0,6; 0,8 та 0,9 відповідно. Знайти імовірність того, що необхідна сума грошей є хоча б у одного із друзів.

Розв’язання:

Імовірності того, що у друзів є необхідна сума:

Знайдемо імовірності того, що друзі не мають необхідної суми:

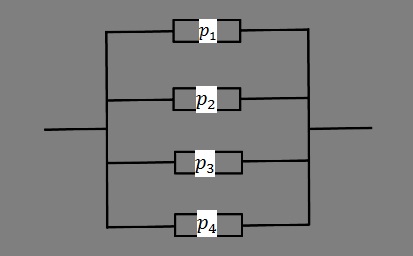
Нам треба знайти імовірність того, що хоча б у одного з друзів є необхідна сума, тому відповіддю буде виключення з загальної сукупності імовірностей варіант, коли жоден з друзів не буде мати необхідної суми:

Відповідь: .

**04-05.**

Для підвищення надійності приладу він дублюється 3 іншими такими самими приладами; надійність приладу дорівнює 0,8. Знайти надійність цієї системи приладів.

Розв’язання:



Система складається з однакових елементів, поєднаних паралельно (тому що прилади , , дублюють прилад ). Так як усі прилади однакові, то їх надійність буде однаковою: ; і імовірність виходу з строю теж буде однаковою:

Така система буде працювати безвідмовно, якщо хоч один елемент не вийде зі строю. Тому імовірність безвідмовної роботи буде дорівнювати:

*.*

Відповідь: .

**05-05.**

Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, початкові моменти 2-го та 5-го порядків, центральний момент 4-го порядку дискретної випадкової величини Х, заданої законом розподілу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 21 | 23 | 24 | 25 |
|  | 0,12 | 0,19 | 0,43 |  |

Розв’язання:

Знайдемо ймовірність появи події Х4. Відомо, що сума ймовірностей подій, що складають повну групу дорівнює 1. Тоді:

.

Математичне сподівання розраховується за формулою .

Дисперсію можна розрахувати за формулою , але для зручності розрахунків скористаємось формулою , де – початкові моменти першого та другого порядків відповідно.  
Середнє квадратичне відхилення дорівнює .  
Початковий момент і-того порядку дорівнює . Відповідно:

Центральний момент *і*-того порядку дорівнює . Відповідно центральний момент четвертого порядку дорівнює

Підставивши необхідні числа отримуємо:

**.**

Обчислимо необхідні початкові моменти:

**.**

=**.**

=

Тоді дисперсія =563.61-562.1641=**1.4459**

Середнє квадратичне відхилення дорівнює . Підставивши значення дисперсії отримуємо:

Обчислимо центральний момент четвертого порядку.

Відповідно, підставивши числа отримуємо:

**Відповідь:** Математичне сподівання= 4.243 , дисперсія=0.051051, середнє квадратичне відхилення=0.2259447, початковий момент 2-го порядку = 18.0541, 5-го порядку=1419.2431933, центральний момент 4-го порядку=0.193974

Відповідь: ; =1.4459; ; ; **;** .

**06-05.**

Батарея зробила 15 пострілів по об’єкту, ймовірність влучення в який дорівнює 0,2. Обчислити:

а) найбільш імовірне число влучень і його ймовірність;

б ) імовірність знищення об’єкту, якщо для знищення потрібно не менше 3 влучень.

Розв’язання:

Батарея зробила пострілів . Імовірність влучення при одному пострілі дорівнює: . Імовірність промаху при одному пострілі дорівнює:

.

а) Найбільш імовірне число влучень вираховується за формулою найбільшого імовірного числа:

*,* де – найбільш імовірне число влучень;

Підставимо відомі значення до рівняння:

;

;

Отже, найбільш імовірне число влучень дорівнює: .

Знайдемо імовірність 3-х влучень:

Так як усі постріли (випробування) незалежні, і імовірність влучення має постійну імовірність, то імовірність 3-х попадань знайдемо за схемою Бернулі:

Підставимо відомі значення до рівняння:

б) Нам треба знайти імовірність того, що об’єкт буде знищено, а для цього потрібно не менше 3 попадань (), тому відповіддю буде виключення з загальної сукупності імовірностей варіанти, коли було 2 попадання, 1 попадання та жодного попадання:

=

Відповідь: а) ; ;

б) .

**07-05.**

Побудувати функцію розподілу відносної частоти за наведеними даними:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4.31 | 6.58 | 6.49 | 7.48 | 5.88 | 6.12 | 4.56 | 5.81 | 6.19 | 5.93 |
| 6.09 | 6.23 | 6.38 | 8.37 | 7.56 | 3.80 | 4.69 | 6.75 | 6.05 | 5.20 |
| 4.65 | 6.96 | 7.19 | 5.35 | 5.23 | 5.94 | 7.55 | 4.71 | 5.40 | 4.89 |
| 5.86 | 5.94 | 4.60 | 6.07 | 6.58 | 5.62 | 6.74 | 6.25 | 7.14 | 5.11 |
| 6.80 | 7.19 | 6.67 | 6.66 | 6.90 | 5.12 | 5.74 | 5.77 | 6.57 | 4.93 |

Розв’язання:

Побудуємо таблицю розподілу, де n*i*– кількість елементів х*і* в вибірці,– відносна частота.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 3,80 | 1 | 0,02 |  | 6,05 | 1 | 0,02 |
| 4,31 | 1 | 0,02 |  | 6,07 | 1 | 0,02 |
| 4,56 | 1 | 0,02 |  | 6,09 | 1 | 0,02 |
| 4,60 | 1 | 0,02 |  | 6,12 | 1 | 0,02 |
| 4,65 | 1 | 0,02 |  | 6,19 | 1 | 0,02 |
| 4,69 | 1 | 0,02 |  | 6,23 | 1 | 0,02 |
| 4,71 | 1 | 0,02 |  | 6,25 | 1 | 0,02 |
| 4,89 | 1 | 0,02 |  | 6,38 | 1 | 0,02 |
| 4,93 | 1 | 0,02 |  | 6,49 | 1 | 0,02 |
| 5,11 | 1 | 0,02 |  | 6,57 | 1 | 0,02 |
| 5,12 | 1 | 0,02 |  | 6,58 | 2 | 0,04 |
| 5,20 | 1 | 0,02 |  | 6,66 | 1 | 0,02 |
| 5,23 | 1 | 0,02 |  | 6,67 | 1 | 0,02 |
| 5,35 | 1 | 0,02 |  | 6,74 | 1 | 0,02 |
| 5,40 | 1 | 0,02 |  | 6,75 | 1 | 0,02 |
| 5,62 | 1 | 0,02 |  | 6,80 | 1 | 0,02 |
| 5,74 | 1 | 0,02 |  | 6,90 | 1 | 0,02 |
| 5,77 | 1 | 0,02 |  | 6,96 | 1 | 0,02 |
| 5,81 | 1 | 0,02 |  | 7,14 | 1 | 0,02 |
| 5,86 | 1 | 0,02 |  | 7,19 | 2 | 0,04 |
| 5,88 | 1 | 0,02 |  | 7,48 | 1 | 0,02 |
| 5,93 | 1 | 0,02 |  | 7,55 | 1 | 0,02 |
| 5,94 | 2 | 0,04 |  | 7,56 | 1 | 0,02 |
|  |  |  |  | 8,37 | 1 | 0,02 |

X*max*= 8,37; X*min*= 3,80;

Відповідно розмах варіаційного ряду R = X*max*- X*min*= 4,57

Візьмемо число класів N=7, оскільки об'єм вибірки менший 100. Тоді ширина класу:

Побудуємо таблицю згрупованого розподілу частоти, а також відносної та накопиченої відносної частоти:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Xk  - Xk+1 | 3,80-4,46 | 4,46-5,12 | 5,12-5,78 | 5,78-6,44 | 6,44-7,1 | 7,1-7,76 | 7,76-8,42 |
| ni | 2 | 8 | 8 | 14 | 11 | 6 | 1 |
| wi | 0.04 | 0.16 | 0.16 | 0.28 | 0.22 | 0.12 | 0.02 |
| F*i* | 2 | 10 | 18 | 32 | 43 | 49 | 50 |
|  | 0.04 | 0.2 | 0.36 | 0.64 | 0.86 | 0.98 | 1.00 |

Функція розподілу відносної частоти - це відносна частота того, що випадкова величина X ‘ менше числа x:

Відповідно для даних значень вона приймає вигляд:

0.00 при

0.04 при

0.2 при

0.36 при

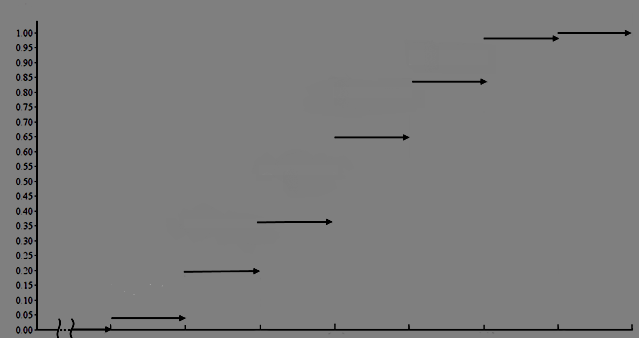
0.64 при

0.86 при

0.98 при

1.00 при

Графік функції розподілу відносної частоти

**

X*k*  - X*k+1*

F(x)

**08-05.**

Обчислити генеральну середню за груповими середніми, генеральну дисперсію за внутришньогруповою і міжгруповою дисперсіями та початковий момент 6 порядку:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4.31 | 6.58 | 6.49 | 7.48 | 5.88 | 6.12 | 4.56 | 5.81 | 6.19 | 5.93 |
| 6.09 | 6.23 | 6.38 | 8.37 | 7.56 | 3.80 | 4.69 | 6.75 | 6.05 | 5.20 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4.65 | 6.96 | 7.19 | 5.35 | 5.23 | 5.94 | 7.55 | 4.71 | 5.40 | 4.89 |
| 5.86 | 5.94 | 4.60 | 6.07 | 6.58 | 5.62 | 6.74 | 6.25 | 7.14 | 5.11 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 6.80 | 7.19 | 6.67 | 6.66 | 6.90 | 5.12 | 5.74 | 5.77 | 6.57 | 4.93 |
| 4.55 | 6.56 | 7.15 | 5.55 | 5.25 | 5.95 | 7.55 | 4.75 | 5.45 | 4.59 |

Розв’язання:

Маємо три групи. Запишемо розподіл частоти кожної з них.

Об’єм кожної з груп знайдемо за формулою , де k – кількість варіант, а n*i* – їх частоти.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Розподіл першої групи: | |  | Розподіл другої групи: | |  | Розподіл третьої групи: | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3,80 | 1 |  | 4,60 | 1 |  | 4,55 | 1 |
| 4,31 | 1 |  | 4,65 | 1 |  | 4,59 | 1 |
| 4,56 | 1 |  | 4,71 | 1 |  | 4,75 | 1 |
| 4,69 | 1 |  | 4,89 | 1 |  | 4,93 | 1 |
| 5,20 | 1 |  | 5,11 | 1 |  | 5,12 | 1 |
| 5,81 | 1 |  | 5,23 | 1 |  | 5,25 | 1 |
| 5,88 | 1 |  | 5,35 | 1 |  | 5,45 | 1 |
| 5,93 | 1 |  | 5,40 | 1 |  | 5,55 | 1 |
| 6,05 | 1 |  | 5,62 | 1 |  | 5,74 | 1 |
| 6,09 | 1 |  | 5,86 | 1 |  | 5,77 | 1 |
| 6,12 | 1 |  | 5,94 | 2 |  | 5,95 | 1 |
| 6,19 | 1 |  | 6,07 | 1 |  | 6,56 | 1 |
| 6,23 | 1 |  | 6,25 | 1 |  | 6,57 | 1 |
| 6,38 | 1 |  | 6,58 | 1 |  | 6,66 | 1 |
| 6,49 | 1 |  | 6,74 | 1 |  | 6,67 | 1 |
| 6,58 | 1 |  | 6,96 | 1 |  | 6,80 | 1 |
| 6,75 | 1 |  | 7,14 | 1 |  | 6,90 | 1 |
| 7,48 | 1 |  | 7,19 | 1 |  | 7,15 | 1 |
| 7,56 | 1 |  | 7,55 | 1 |  | 7,19 | 1 |
| 8,37 | 1 |  | - | - |  | 7,55 | 1 |
|  | |  |  | |  |  | |

Групова середня розраховується за формулою:

, де N*j*  - об'єм групи, k – кількість варіант, n*i* – частота варіанти х*і*.

Знайдемо значення групової середньої для кожної групи:

1)Групова середня першої групи:

2)Групова середня другої групи:

3)Групова середня третьої групи:

Оскільки ми розглядаємо генеральну сукупність, загальна середня є також і генеральною.

Знайдемо загальну середню за формулою:

де - групова середня, Nj  - об'єм групи, l – кількість груп, N – об'єм сукупності.

Підставивши у формулу відомі значення отримаємо:

Міжгрупову дисперсія можна обчислити за формулою:

,

де Nj  - об'єм групи, *l* – кількість груп, N – об'єм сукупності, - відхилення групової середньої від загальної в квадраті.

Внутрішньогрупова дисперсія обчислюється за формулою:

,

де - групова дисперсія, Nj  - об'єм групи, *l* – кількість груп, N – об'єм сукупності. Отже, необхідно знайти групову дисперсію для кожної з груп. Обрахувати групову дисперсію можна за формулою:

,

де ni – частота квадрату відхилення варіанти xi від групової середньої , Nj  - об'єм групи, k – кількість варіант.

1. Групова дисперсія першої групи:

**1.19042275**

1. Групова дисперсія другої групи:
2. Групова дисперсія третьої групи:

Відповідно,

Загальна дисперсія, яка у цьому завданні також є генеральною, обчислюється за формулою:

Підставляючи дані в формулу отримуємо:

***0,950092***

Статистичний початковий момент k-го порядку обчислюється за формулою:

,

де n*i* – частота варіанти x*i*, m – кількість варіант, - об'єм сукупності.

Відповідно, початковий момент шостого порядку дорівнює:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3,80 | 1 |  | 5,45 | 1 |  | 6,49 | 1 |
| 4,31 | 1 |  | 5,55 | 1 |  | 6,56 | 1 |
| 4,55 | 1 |  | 5,62 | 1 |  | 6,57 | 1 |
| 4,56 | 1 |  | 5,74 | 1 |  | 6,58 | 2 |
| 4,59 | 1 |  | 5,77 | 1 |  | 6,66 | 1 |
| 4,60 | 1 |  | 5,81 | 1 |  | 6,67 | 1 |
| 4,65 | 1 |  | 5,86 | 1 |  | 6,74 | 1 |
| 4,69 | 1 |  | 5,88 | 1 |  | 6,75 | 1 |
| 4,71 | 1 |  | 5,93 | 1 |  | 6,80 | 1 |
| 4,75 | 1 |  | 5,94 | 2 |  | 6,90 | 1 |
| 4,89 | 1 |  | 5,95 | 1 |  | 6,96 | 1 |
| 4,93 | 1 |  | 6,05 | 1 |  | 7,14 | 1 |
| 5,11 | 1 |  | 6,07 | 1 |  | 7,15 | 1 |
| 5,12 | 1 |  | 6,09 | 1 |  | 7,19 | 2 |
| 5,20 | 1 |  | 6,12 | 1 |  | 7,48 | 1 |
| 5,23 | 1 |  | 6,19 | 1 |  | 7,55 | 2 |
| 5,25 | 1 |  | 6,23 | 1 |  | 7,56 | 1 |
| 5,35 | 1 |  | 6,25 | 1 |  | 8,37 | 1 |
| 5,40 | 1 |  | 6,38 | 1 |  |  |  |

Початковий момент шостого порядку дорівнює:

Відповідь: ; 0,950092;

**09-05.**

На склад завезли 50 процесорів, 40 з яких фірми Intel, а 10 залишившихся фірми AMD. Для студентів зі спеціальності «комп’ютерна інженерія» потрібен комп’ютерний клас з 8 комп’ютерів на базі процесорів Intel. Кафедра замовляє необхідну кількість процесорів зі складу, але неуважний робітник складу навмання видирає 8 процесорів, та відправляє їх бандероллю до університету. Яка імовірність того що 7 присланих процесорів фірми Intel.

Розв’язання:

Для вирішення цієї задачі використовуємо формулу гіпергеометричного розподілу:



Такий розподіл вказує імовірність появи m елементів з певною властивістю серед n елементів, взятих із сукупності N елементів, яка містить M елементів саме такої властивості.

В нашому випадку, загальна кількість процесорів (N = 50); із яких фірми Intel (M = 40); кількість необхідних процесорів комп’ютерному класу (n = 8); запланована кількість підходящих процесорів (m = 7).

Знайдемо шукану імовірність:

Відповідь:

**10-05.**

Дан наступний варіаційний ряд:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 1 | 3 |
| 2 | 3 |
| 3 | 4 |
| 4 | 4 |
| 5 | 5 |
| 6 | 5 |
| 7 | 5 |
| 8 | 5 |
| 9 | 7 |
| 10 | 7 |

Побудувати полігон розподілу, вирахувати моду, медіану,незміщену оцінку дисперсії.

Розв’язання:

Полігон розподілу – це залежність абсолютної частоти варіанта від значення варіанта . Зобразимо цю залежність у таблиці:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 3 | 4 | 5 | 7 |
|  | 2 | 2 | 4 | 2 |

Мода дорівнює варіанту, який має найбільшу частоту:

Медіана дорівнює середньому варіанту виборки:

Незміщена оцінка дисперсії дорівнює:

Де – вибіркова дисперсія, – загальна кількість елементів;

Знайдемо вибіркову дисперсію:

Відповідь: